Lösningar till tentamen i Algebra och Geometri från 2015-10-22

Dan Lilja

18 oktober 2017

1. *Svar.* Talen är

$$
\begin{aligned}
z_1 &= \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2} \\
z_2 &= i \\
z_3 &= -\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2} \\
z_4 &= -\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2} \\
z_5 &= -i \\
z_6 &= \frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\,.
\end{aligned}
$$

□

Lösning. Vi använder att $-1 = \cos\pi + i\sin\pi$ för att skriva båda leden på polär form och använder oss av de Moivres formel:

$$
\begin{aligned}
& r^6(\cos(6\theta) + i\sin(6\theta)) = \cos(\pi) + i\sin\pi \\
\Leftrightarrow\ & r^6 = 1,\ 6\theta = \pi + 2\pi n \\
\Leftrightarrow\ & r = 1,\ \theta = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}n
\end{aligned}
$$

där n är något heltal. De möjliga vinklarna är alltså $\frac{\pi}{6}, \frac{3\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{9\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$ vilket ger värdena

$$
\begin{aligned}
z_1 &= \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2} \\
z_2 &= i \\
z_3 &= -\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2} \\
z_4 &= -\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2} \\
z_5 &= -i \\
z_6 &= \frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\,.
\end{aligned}
$$

$\square$

2. *Svar.* Lösningarna är $z = 1 \pm 2i$ och $z = \pm\sqrt{2}i$. $\square$

Lösning. Eftersom polynomet är reellt vet vi att komplexa lösningar måste komma i konjugerade par, alltså måste även $z = 1 - 2i$ vara en lösning. Enligt faktorsatsen kan vi därför bryta ut $(z-(1+2i))(z-(1-2i)) = z^2 - 2z + 5$:

$$
\begin{array}{rl}
z^2 + 2 & \\
\hline
z^4 - 2z^3 + 7z^2 - 4z + 10 & \big|\; z^2 - 2z + 5 \\
-(z^4 - 2z^3 + 5z^2) & \\
\hline
2z^2 - 4z + 10 & \\
-(2z^2 - 4z + 10) & \\
\hline
0 &
\end{array}
$$

Vi ser att $z^4 - 2z^2 + 7z^2 - 4z + 10 = (z^2 - 2z + 5)(z^2 + 2)$. Ekvationen $z^2 + 2 = 0$ har lösningarna $z = \pm\sqrt{2}i$. Alltså har ekvationen $z^4 - 2z^3 + 7z^2 - 4z + 10 = 0$ lösningarna $z = 1 \pm 2i$ och $z = \pm\sqrt{2}i$. $\square$

3. *Lösning.* Låt $VL_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k}$ och $HL_n = 2 - \frac{n+2}{2^n}$.

Basfall För $n = 1$ har vi

$$\begin{aligned} VL_1 &= \sum_{k=1}^{1} \frac{k}{2^k} \\ &= \frac{1}{2} \\ &= 2 - \frac{3}{2} \\ &= 2 - \frac{1+2}{2^1} \\ &= HL_1 \end{aligned}$$

så basfallet är stämmer.

Induktionsantagande Antag att $VL_p = HL_p$ för något heltal $p \geq 1$.

Induktionssteg För $n = p + 1$ har vi

$$\begin{aligned} VL_{p+1} &= \sum_{k=1}^{p+1} \frac{k}{2^k} \\ &= \sum_{k=1}^{p} \frac{k}{2^k} + \frac{p+1}{2^{p+1}} \\ &\overset{\text{IA}}{=} 2 - \frac{p+2}{2^p} + \frac{p+1}{2^{p+1}} \\ &= 2 - \frac{2p+4-p-1}{2^{p+1}} \\ &= 2 - \frac{p+3}{2^{p+1}} \\ &= 2 - \frac{(p+1)+2}{2^{p+1}} \\ &= HL_{p+1} \end{aligned}$$

Enligt induktionsprincipen gäller därför $VL_n = HL_n$ för alla heltal $n \geq 1$. □

4. *Svar.* (a) $\binom{20}{7}$ olika sätt.

(b) 7! olika sätt.

(c) $40 \cdot 4! = 960$ olika sätt.

□

Lösning. (a) Eftersom vi inte bryr oss om i vilken ordning de sitter på första raden är antalet sätt lika många som antalet sätt att utan ordning och återläggning välja 7 objekt ur en mängd av 20 objekt, nämligen antalet sätt att välja ut vilka 7 studenter som ska sitta på första raden. Detta antal är $\binom{20}{7}$.

(b) Vi ska nu göra ett ordnat urval utan återläggning av de 7 personerna på 7 olika platser. Detta kan göras på 7! olika sätt.

(c) Antag först att Diana sitter till vänster om Anders. Eftersom dem alltid sitter tillsammans och tar upp två platser kan vi istället slå ihop dem och tänka oss att vi istället har 6 stycken platser. Antag nu att Carl sitter längst ut till vänster. Gustav kan då sitta på någon av 4 olika platser. Därefter kan resten placeras ut hur som helst. Multiplikationsprincipen säger därför att antalet sätt blir $4 \cdot 4!$. På samma sätt får vi $4 \cdot 4!$ olika sätt om Carl sitter på högerkanten. Om Carl sitter på någon plats i mitten kan Gustav sitta på någon av 3 olika platser. Resten kan placeras ut fritt på $4!$ olika sätt och Det finns 4 platser i mitten, alltså finns det $4 \cdot 3 \cdot 4!$ olika sätt. Sammanlagt finns det alltså $4 \cdot 4! + 4 \cdot 4! + 4 \cdot 3 \cdot 4! = 20 \cdot 4!$ olika sätt att placera ut studenterna med Diana till vänster om Anders. Med Diana till höger om Anders finns det lika många sätt till så det totala antalet sätt att placera ut studenterna enligt uppgiften är alltså $40 \cdot 4!$.

$\square$

5. *Svar.* För $a \neq 1$ har systemet en unik lösning $(x, y, z) = \left(\frac{8}{3}, -\frac{1}{3}, 1\right)$, om $a = 1$ har systemet oändligt många lösningar som ges av $(x, y, z) = \left(1 + \frac{5}{3}t, -\frac{1}{3}t, t\right)$ där t är något reellt tal. $\square$

Lösning. Totalmatrisen för systemet är följande:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & a & a-1 \end{array}\right)$$

Vi vill lösa systemet genom att först förenkla det m.h.a. radoperationer:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & a & a-1 \end{array}\right) \begin{array}{l} + \\ -1 \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & a & a-1 \end{array}\right) \begin{array}{l} -1 \\ \\ + \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & a-1 & a-1 \end{array}\right)$$

Från den sista matrisen ser vi att vi kan göra följande falluppdelning:

Fall 1: Om $a - 1 \neq 0 \iff a \neq 1$ kan vi dividera sista raden $(a-1)z = a - 1$ och får då $z = 1$. Insättning i första raden ger oss

$$3y + z = 3y + 1 = 0 \iff y = -\frac{1}{3}.$$

Slutligen får vi från andra raden

$$x - y - 2z = x + \frac{1}{3} - 2 = 1 \iff x = \frac{8}{3}.$$

Systemet har alltså lösningen $(x, y, z) = \left(\frac{8}{3}, -\frac{1}{3}, 1\right)$.

Fall 2: Om $a - 1 = 0 \iff a = 1$ blir den tredje ekvationen bara $0 = 0$ och vi får ingen information om z. Sätt därför $z = t$. Den första ekvationen ger oss då att $y = -\frac{t}{3}$. Slutligen ger den andra ekvationen $x - y - 2z = x + \frac{t}{3} - 2t = 1 \iff x = 1 + \frac{5}{3}t$. Systemet har alltså oändligt många lösningar, $(x, y, z) = \left(1 + \frac{5}{3}t, -\frac{1}{3}t, t\right)$ för $t \in \mathbb{R}$.

$\square$

6. *Svar.* (b)

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -6 & 3 & -1 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

(c)

$$X = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & -4 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$\square$

Lösning. (a) Vi kan avgöra om A är inverterbar genom att beräkna dess determinant:

$$\begin{aligned} \det(A) &= \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \\ &= 3 - 6 + 4 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Eftersom determinanten inte är 0 är matrisen A inverterbar.

(b) Vi använder oss av radoperationer:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} -2 \\ + \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} + \\ -1 \quad -2 \\ + \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -2 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ + \\ -1 \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -6 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

Vi ser nu att

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -6 & 3 & -1 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

(c) Vi kan se att $AXB^{-1} = C \;\Rightarrow\; X = A^{-1}AXB^{-1}B = A^{-1}CB$ så vi behöver beräkna matrisen $A^{-1}CB$:

$$
\begin{aligned}
A^{-1}CB &= \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -6 & 3 & -1 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & -4 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

□

7. OBS: Del (a) kan ha två olika svar beroende på hur den löses (rita upp en bild och försök se varför) men svaret i del (b) är alltid samma. Jag ger en lösning.

Svar. (a) Punkten C har koordinater $(3, 2, 5)$ eller $(1, 0, 3)$.

(b) Arean är $\sqrt{14}$.

□

Lösning. (a) Eftersom sidan CD måste vara parallell med sidan AB måste punkten C ligga på linjen ℓ som ges av ℓ: $\overrightarrow{0D} + t\overrightarrow{AB}$. Detta ger punkten C koordinaterna C: $(2+t, 1+t, 4+t)$. Om vi nu låter en sida ges av AD måste den sista sidan ges av BC, alltså måste vektorn $\overrightarrow{AD} = (0, 2, 3)$ vara lika med vektorn $\overrightarrow{BC} = (-1+t, 1+t, 2+t)$. Detta ger oss ekvationen $(0, 2, 3) = (-1+t, 1+t, 2+t)$ som har lösningen $t = 1$. Insättning i koordinaterna för punkten C ger oss C: $(3, 2, 5)$.

(b) Parallellogrammets area ges av längden av kryssprodukten mellan vektorerna som utgör sidorna i en punkt. Vi väljer vektorerna $\overrightarrow{AB} = (1, 1, 1)$ och $\overrightarrow{AD} = (0, 2, 3)$.

$$
\begin{aligned}
\begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \vec{\imath} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} \vec{\jmath} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \vec{k} \\
&= (1, -3, 2), \\
|(1, -3, 2)| &= \sqrt{1 + 9 + 4} \\
&= \sqrt{14}\,.
\end{aligned}
$$

Vi ser alltså att arean är $\sqrt{14}$.

□

8. *Svar.* (b) Mittpunktens koordinater är $(1, 2, 3)$.

$\square$

Lösning. (a) Givet tre punkter A, B, och C kan vi alltid bilda en triangel av sidorna AB, BC, och CA. För att visa triangeln är liksidig måste vi kolla att vektorerna $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}$ alla har samma längd L.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= (-1, 2, -1),\\ \overrightarrow{BC} &= (-1, -1, 2),\\ \overrightarrow{CA} &= (2, -1, -1).\end{aligned}$$

Härifrån kan vi se att alla sidor i triangeln har samma längd, alltså är triangeln liksidig.

(b) För att hitta triangelns mittpunkt P tar vi medelvärdet av vektorerna $\overrightarrow{0A}$, $\overrightarrow{0B}$, och $\overrightarrow{0C}$. Vi får

$$\begin{aligned}\overrightarrow{0P} &= \frac{\overrightarrow{0A} + \overrightarrow{0B} + \overrightarrow{0C}}{3}\\ &= \frac{(2, 1, 3) + (1, 3, 2) + (0, 2, 4)}{3}\\ &= \frac{(3, 6, 9)}{3}\\ &= (1, 2, 3)\end{aligned}$$

så mittpunkten P har koordinater $(1, 2, 3)$.

$\square$