Lösningar till tentamen i Algebra och Geometri från 2016-08-24

Dan Lilja

18 oktober 2017

1. *Svar.* Rötterna är $z_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$, $z_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$, $z_3 = -\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$, $z_4 = -\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$. □

   Lösning. Observera att alla z-termer är av jämn grad. Vi kan därför använda variabelbytet $t = z^2$ för att förenkla ekvationen till $t^2 + 2t + 4 = 0$. Den här ekvationen har rötter $t = -1 \pm \sqrt{3}i$, enligt exempelvis p-q-formeln. Det återstår då att lösa ekvationen $z^2 = -1 \pm \sqrt{3}i$. För att lösa denna ekvation skriver vi om z på polär form, $z = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$, och använder de Moivres formel. Detta ger oss ekvationen $r^2(\cos(2\theta) + i\sin(2\theta)) = -1 \pm \sqrt{3}i$. Vi kan se att $r^2 = \sqrt{1+3} = 2$ så $r = \sqrt{2}$. Vi får nu också att

$$\begin{aligned} \cos(2\theta) + i\sin(2\theta) &= -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \Rightarrow\ \cos(2\theta) &= -\frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow\ 2\theta &= \frac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ \frac{4\pi}{3} + 2\pi n \\ \Leftrightarrow\ \theta &= \frac{\pi}{3} + \pi n,\ \frac{2\pi}{3} + \pi n \end{aligned}$$

   där n är något heltal. Detta ger oss fyra olika vinklar att undersöka: $\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$. Med insättning kan vi se att dessa vinklar även stämmer för sinus-termen. Genom insättning i $z = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$ ger detta oss rötterna $z_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$, $z_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$, $z_3 = -\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$, $z_4 = -\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$. □

2. *Svar.* Koefficienten är $\binom{11}{4}3^7 4^4$ □

   Lösning. Notera först att $\frac{1}{x} = x^{-1}$. Enligt binomialsatsen gäller att

$$\begin{aligned} \left(3x - \frac{4}{x^2}\right)^{11} &= \sum_{k=0}^{11} \binom{11}{k} (3x)^{11-k} \left(-\frac{4}{x^2}\right)^k \\ &= \sum_{k=0}^{11} \binom{11}{k} 3^{11-k}(-1)^k 4^k x^{11-3k}. \end{aligned}$$

För att få termen x^{-1} måste $11-3k=-1 \iff 3k=12 \iff k=4$. För $k=4$ får vi då

$$\binom{11}{4}3^7(-1)^4 4^4 = \binom{11}{4}3^7 4^4 .$$

□

3. *Lösning.* Låt först $VL_n = \sum_{k=1}^{n} 4^{k-1}$ och $HL_n = \frac{4^n-1}{3}$. Som basfall använder vi nu fallet $n=1$.

Basfall Vi har

$$\begin{aligned}
VL_1 &= \sum_{k=1}^{1} 4^{k-1} \\
&= 4^0 \\
&= 1, \\
HL_1 &= \frac{4^1-1}{3} \\
&= \frac{3}{3} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Vi ser att $VL_1 = HL_1$.

Induktionsantagande Antag att $VL_p = HL_p$ för något heltal $p \geq 1$.

Induktionssteg För $n = p+1$ har vi

$$\begin{aligned}
VL_{p+1} &= \sum_{k=1}^{p+1} 4^{k-1} \\
&= \sum_{k=1}^{p} 4^{k-1} + 4^p \\
&\overset{\text{IA}}{=} \frac{4^p-1}{3} + 4^p \\
&= \frac{4^p - 1 + 3\cdot 4^p}{3} \\
&= \frac{4\cdot 4^p - 1}{3} \\
&= \frac{4^{p+1}-1}{3} \\
&= HL_{p+1} .
\end{aligned}$$

Enligt induktionsprincipen gäller därför att $VL_n = HL_n$ för alla heltal $n \geq 1$. □

4. *Lösning.* (a) En diagonal bestäms entydigt av två icke närliggande punkter. Givet en punkt finns det 17 stycken icke närliggande punkter. Eftersom det finns 20

punkter är det då lätt att dra den felaktiga slutsatsen att det därför, enligt multiplikationsprincipen, finns $20 \cdot 17$ diagonaler, men då har man räknat varje diagonal två gånger: en gång från punkt A till punkt B och en gång från punkt B till punkt A. Det rätta antalet diagonaler är därför $\frac{20 \cdot 17}{2}$.

(b) Först behöver vi observera att i varje fyrhörning alltid finns exakt ett par av diagonaler som skär varandra i en inre punkt, så som uppgiften efterfrågar. På motsvarande sätt, om vi har ett par av diagonaler som skär varandra i en inre punkt kan vi skapa en fyrhörning genom att koppla ihop diagonalernas ändpunkter och att olika par ger oss olika fyrhörningar. Antalet diagonaler som skär varandra i en inre punkt är alltså samma som antalet fyrhörningar som kan bildas av 20-hörningens hörn. För att bilda en fyrhörning måste vi välja 4 av 20-hörningens hörn och dessa kan väljas utan inskränkning. Antalet blir därför $\binom{20}{4}$.

$\square$

5. *Svar.* För $a = -3$ har systemet oändligt många lösningar och för $a \neq -3$ har systemet ingen lösning. För $a = -3$ ges lösningarna av $(x, y, z) = (-2 - 3t, -1 - 2t, t)$. $\square$

Lösning. Vi ställer upp totalmatrisen för systemet och jobbar med denna:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 4 & a \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & -3 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & a+2 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & -4 & 2 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & a+2 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2a+6 \end{array}\right)$$

Den sista raden säger nu att $0 = 2a + 6 \iff a = -3$. Så om $a \neq -3$ saknar systemet lösningar. Om istället $a = -3$ reducerar systemet till ett system av två ekvationer med tre okända. Första raden är då $y + 2z = -1$. Sätter vi $z = t$ ser vi att $y = -1 - 2t$. Insättning i den andra raden ger oss

$$-x + y - z = -x - 1 - 2t - t = -x - 1 - 3t = 1 \iff x = -2 - 3t.$$

Så vi får oändligt många lösningar som ges av $(x, y, z) = (-2 - 3t, -1 - 2t, t)$. $\square$

6. *Svar.* (a) Matrisen är inverterbar för $a \neq -1$.

(b) För $a \neq -1$ är inversen

$$\begin{pmatrix} -\frac{a+2}{a+1} & 1 & -\frac{1}{a+1} \\ -2 & 1 & 0 \\ \frac{1}{a+1} & 0 & \frac{1}{a+1} \end{pmatrix}$$

$\square$

Lösning. (a) Vi kan avgöra om matrisen är inverterbar eller inte genom att beräkna dess determinant eftersom inverterbarhet är ekvivalent med en nollskild determinant:

$$\begin{aligned}
\det\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & a \end{pmatrix} &= \det\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & a \end{pmatrix} - (-1)\cdot\det\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & a \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= -a - 2 + 2a + 2 + 2 - 1 \\
&= a + 1.
\end{aligned}$$

Vi kan alltså se att determinanten är nollskild för $a \neq -3$ och därför är matrisen inverterbar för alla reella tal $a \neq -1$.

(b) Vi använder radoperationer för att invertera inversen under antagandet att $a \neq -1$.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & a & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a+1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \ \Big| \cdot \tfrac{1}{a+1}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{a+1} & 0 & \frac{1}{a+1} \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{a+2}{a+1} & 1 & -\frac{1}{a+1} \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{a+1} & 0 & \frac{1}{a+1} \end{array}\right)$$

Vi kan alltså se att inversen ges av

$$\begin{pmatrix} -\frac{a+2}{a+1} & 1 & -\frac{1}{a+1} \\ -2 & 1 & 0 \\ \frac{1}{a+1} & 0 & \frac{1}{a+1} \end{pmatrix}$$

□

7. *Svar.* (b) Arean av rektangeln är $\sqrt{66}$.

□

Lösning. (a) Av punkterna kan bildas 6 stycken sidor, $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}$. Bland dessa sidor vill vi hitta 4 stycken sidor ordnade på ett sådant sätt att nästa sida börjar där föregående slutar och den sista slutar där den första börjar och som ska uppfylla att motstående sidor är parallella och att närstående sidor är vinkelräta. Vi börjar med det mest omedelbara valet:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AB} &= (2-1, -1+2, 0-3) = (1,1,-3) \\
\overrightarrow{BC} &= (3-2, 1+1, 1-0) = (1,2,1) \\
\overrightarrow{CD} &= (2-3, 0-1, 4-1) = (-1,-1,3) \\
\overrightarrow{DA} &= (1-2, -2-0, 3-4) = (-1,-2,-1).
\end{aligned}$$

Vi kan här se att $\overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{AB}$ och $\overrightarrow{DA} = -\overrightarrow{BC}$ så de motstående sidorna är parallella. För att undersöka om närstående sidor är vinkelräta använder vi skalärprodukten. Observera att $\overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{DA}$.

$$\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AD} = (1,1,-3) \bullet (1,2,1) = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + (-3) \cdot 1 = 0.$$

Eftersom skalärprodukten är 0 vet vi att sidorna $\overrightarrow{AB}$ och $\overrightarrow{AD}$ är vinkelräta så vinkeln $\angle DAB$ är 90° och eftersom motstående sidor är parallella betyder det att alla hörn har vinkeln 90°, alltså utgör punkterna hörnen i en rektangel.

(b) Rektangeln spänns upp av vektorerna $\overrightarrow{AB}$ och $\overrightarrow{AD}$ (som båda utgår från punkten A). Dess area kan därför beräknas genom att använda kryssprodukten mellan dessa vektorer. Längden av deras kryssprodukt ger oss arean av rektangeln.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} &= \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \vec{\imath} - \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \vec{\jmath} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \vec{k} \\
&= (7, -4, 1),
\end{aligned}$$

så $\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}\right| = |(7,-4,1)| = \sqrt{7^2 + 4^2 + 1^2} = \sqrt{66}$.

□

8. *Svar.* Avståndet är $\sqrt{6}$. □

Lösning. Linjerna är parallella om den ena linjens riktningsvektor är en multipel av den andra. Låt v_1 vara den första linjens riktningsvektor och v_2 den andra linjens riktningsvektor. Vi har då $\vec{v_1} = (1,-2,3)$ och $\vec{v_2} = (-2,4,-6) = -2v_1$ så linjerna är parallella. Låt P_1 vara punkten $P_1 = (1,0,1)$ på linjen ℓ_1. En punkt P på linjen ℓ_2 kan skrivas som $P = (1-2t, 4+4t, -1-6t)$. Punkten P på linjen ℓ_2 som är närmast punkten P_1 fås för det reella tal t som uppfyller att vektorn $\overrightarrow{P_1P}$ är ortogonal mot linjen ℓ_1, d.v.s. när $\overrightarrow{P_1P} \bullet \vec{v_1} = 0$. Vi ser att

$$\overrightarrow{P_1P} = (1-2t, 4+4t, -1-6t) - (1,0,1) = (-2t, 4+4t, -2-6t)$$

så vi får

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{P_1P} \bullet \overrightarrow{v_1} &= (-2t, 4+4t, -2-6t) \bullet (1,-2,3) \\
&= (-2t)\cdot 1 + (4+4t)\cdot(-2) + (-2-6t)\cdot 3 \\
&= -2t - 8 - 8t - 6 - 18t \\
&= -28t - 14 \\
&= 0 \\
\Leftrightarrow \quad t &= -\frac{1}{2}\,.
\end{aligned}$$

Punkten P på linjen ℓ_2 som är närmast punkten P_1 är alltså $P = (2,2,2)$ och avståndet ges av

$$\begin{aligned}
\left|\overrightarrow{P_1P}\right| &= |(1,2,1)| \\
&= \sqrt{6}\,.
\end{aligned}$$

Eftersom linjerna är parallella är detta avstånd samma oberoende av punkterna som väljs. Alltså är avståndet mellan linjerna $\sqrt{6}$. $\square$